**EXERCICE 1**

A)1) on résoud d'abord l'équation homogène $y'' - y = 0$ dont les solutions sont $u(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x,\ \lambda, \mu \in R$.

2) on cherche ensuite une solution particulière; relativement simple, elle est donnée par l'énoncé, il suffit de remplacer *y* par *g(x)* pour vérifier: $g(x) = (x^2 + 4x)e^{-x}$ donc

$g'(x) = (2x + 4 - x^2 - 4x)e^{-x} = (-x^2 - 2x + 4)e^{-x}$ et

$g''(x) = (-2x - 2 + x^2 + 2x - 4)e^{-x} = (+x^2 - 6)e^{-x}$ d'où:

$$g''(x) - g(x) = (x^2 - 6 - x^2 - 4x)e^{-x} = (-6 - 4x)e^{-x} \text{ cqfd.}$$

3) pour l'ensemble des solutions on ajoute solution homogène et solution particulière d'où:

$$\underline{f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + (x^2 + 4x)e^{-x},\ \lambda, \mu \in R}$$

4) première condition: $f(0) = 3 \Leftrightarrow \lambda + 0 + 0 = 3 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 3}$. Donc

$f(x) = 3\cos x + \mu \sin x + (x^2 + 4x)e^{-x},\ \lambda, \mu \in R$

seconde condition: je dérive je trouve

$f'(x) = -3\sin x + \mu \cos x + (-x^2 - 2x + 4)e^{-x},\ \lambda, \mu \in R$ (la seconde partie a déjà été calculée au 2).

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu + 4 = 1 \Leftrightarrow \underline{\mu = -3}$

**Conclusion**: $\underline{f(x) = 3\cos x - 3\sin x + (x^2 + 4x)e^{-x}}$

B) $f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$

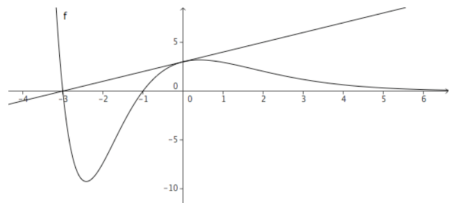
DL: $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ donc

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)$$

$f(x) = 3 - 3x + 4x + \dfrac{3x^2}{2} - 4x^2 + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ d'où le résultat.

Tangente en 0: $y = 3 + x$ (c'est le développement limité à l'ordre 1)

Positions relatives: $f(x) - y = -\dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ négatif dans un voisinage de 0 donc Cf est localement en dessous de sa tangente.



**EXERCICE 2**

A) 1) On lit sur le graphique que $\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$, on en déduit que

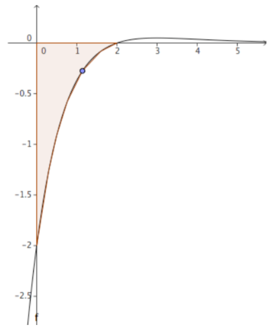
$\begin{cases} b = -2 \\ (2a + b)e^{-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ 2a + (-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases}$ d'où le résultat admis par l'énoncé ensuite.

2) $f'(x) = e^{-x} + (x - 2)(-e^{-x}) = (1 - x + 2)e^{-x} = (3 - x)e^{-x}$

positif avant 3 et négatif après.

| t | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(t) | + | | – |
| f | $-\infty$ ↗ | $e^{-3}$ | ↘ 0 |

B)




$$\int_0^2 (x-2)e^{-x}dx = \left[-(x-2)e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx$$

$$\int_0^2 (x-2)e^{-x}dx = \left[(2-x)e^{-x}\right]_0^2 - \left[e^{-x}\right]_0^2$$

$$\int_0^2 (x-2)e^{-x}dx = 0-2-\left(e^{-2}-1\right) = \underline{-1-e^{-2}}$$

Pour obtenir l'aire on multiplie par 2x2 (unité graphique) et par (-1) (la fonction est négative dans cet intervalle) d'où

$$\boxed{S = 2+\frac{2}{e^2} \approx 2{,}27\,cm^2}$$

**EXERCICE 3**

A) Il faut savoir recalculer les polynômes de Bézier à partir de la formule initiale. *On va aussi faire ici les polynômes de Bernstein tant qu'on y est, ça vous fera une fiche pratique pour réviser.*

<u>Calcul des polynômes de Bézier</u>:

$$\boxed{B_{n,k}(t) = \binom{n}{k}(1-t)^k\, t^{n-k}} \quad \text{k=0…n}$$

on a donc:

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3 = 1-3t+3t^2-t^3$$

$$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2 = 3t\left(1-2t+t^2\right) = 3t-6t^2+3t^3$$

$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t) = 3t^2-3t^3$$

$$B_{0,3}(t) = t^3$$

<u>Calcul des polynômes de Bernstein</u>:

$$\boxed{R_k(t) = 3\sum_{j=0}^{j=2-k}(-1)^j\frac{(t+2-k-j)^2}{j!(3-j)!}} \quad \text{k=0,1,2}$$

on a donc:

---

$$R_0(t) = 3\sum_{j=0}^{j=2}(-1)^j\frac{(t+2-j)^2}{j!(3-j)!} = 3\left\{\frac{(t+2)^2}{3!}-\frac{(t+1)^2}{2!}+\frac{t^2}{2!}\right\}$$

$$R_0(t) = 3\left\{\frac{t^2+4t+4}{6}-\frac{\cancel{t^2}+2t+1}{2}+\frac{\cancel{t^2}}{2}\right\} = 3\left(\frac{t^2}{6}-\frac{t}{3}+\frac{1}{6}\right)$$

$$R_0(t) = \frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}$$

---

$$R_1(t) = 3\sum_{j=0}^{j=1}(-1)^j\frac{(t+1-j)^2}{j!(3-j)!} = 3\left\{\frac{(t+1)^2}{3!}-\frac{t^2}{2!}\right\}$$

$$R_1(t) = 3\left\{\frac{t^2+2t+1}{6}-\frac{t^2}{2}\right\} = 3\left(-\frac{t^2}{3}+\frac{t}{3}+\frac{1}{6}\right)$$

$$R_1(t) = -t^2+t+\frac{1}{2}$$

---

$$R_2(t) = 3\sum_{j=0}^{j=0}(-1)^j \frac{(t-j)^2}{j!(3-j)!} = 3\left\{\frac{t^2}{3!}\right\}$$

$$R_2(t) = \frac{t^2}{2}$$

*On vérifie que la somme* $R_0(t)+R_1(t)+R_2(t)$ *fait* 1.

---

*On revient à nos moutons:*

A2) $\begin{cases} x(t) = 2B_{1,3}(t) \\ y(t) = B_{0,3}(t) + B_{1,3}(t) + 2B_{2,3}(t) + 4B_{3,3}(t) \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = 2\left(3t - 6t^2 + 3t^3\right) \\ y(t) = \left(1 \cancel{-3t} + 3t^2 - t^3\right) + \left(\cancel{3t} \cancel{-6t^2} + 3t^3\right) + 2\left(\cancel{3t^2} - 3t^3\right) + 4t^3 \end{cases}$$

$\begin{cases} x(t) = 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y(t) = 1 + 3t^2 \end{cases}$ cqfd.

On dérive:

$$\begin{cases} x'(t) = 6 - 24t + 18t^2 = 6\left(1 - 4t + 3t^2\right) \\ y'(t) = 6t \end{cases}$$

d'où le double tableau de variations (page suivante)

tangente horizontale en $M_0(0;1)$

tangentes verticales en $M_{1/3}(0.88;1.33)$ et $M_1(0;4)$.

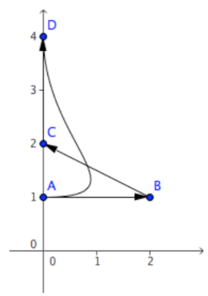
La droite (AB) est tangente à la courbe en t=0, cela découle de la définition des courbes de Bézier et il faut le savoir. Maintenant ici on demande de le démontrer donc on applique la formule suivante:

$$\overrightarrow{T_{t=t_0}}\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$

qui nous dit que le vecteur tangent en t=0 est $\overrightarrow{T_0}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or, les coordonnées de (AB) sont: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs étant colinéaires, on a répondu à la question.

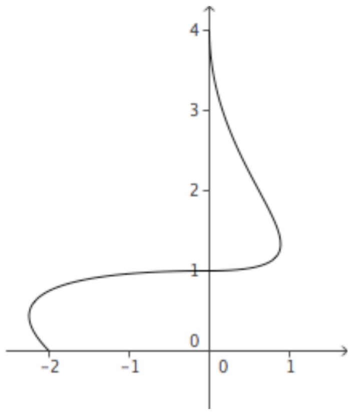
De même, (CD) est tangent à la courbe en t=1.

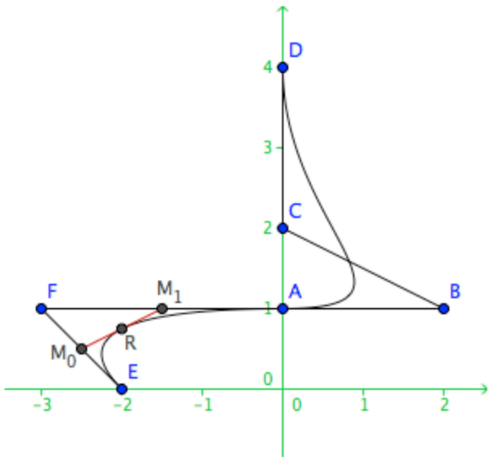
| t | 0 | | 1/3 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| x'(t) | | + | 0 | − | 0 |
| x | 0 | ↗ | 0,88 | ↘ | 0 |
| y'(t) | | + | | + | |
| y | 1 | ↗ | 1,33 | ↗ | 4 |



B) *On rentre dans la géométrie…*

les deux courbes






Ces inégalités vectorielles signifient que:

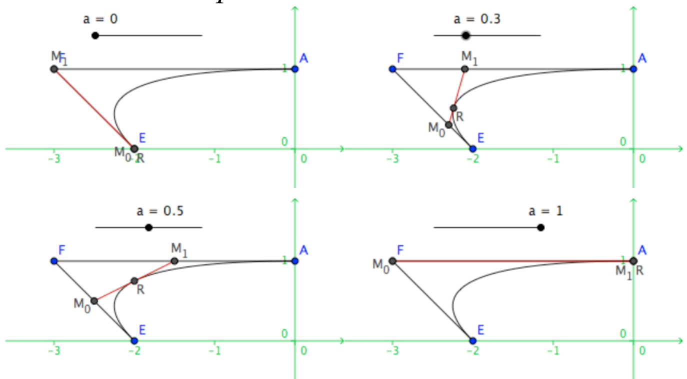
- $M_0 = mil[EF]$ d'où $M_0(-2.5,0.5)$
- $M_1 = mil[AF]$ d'où $M_1(-1.5,1)$
- $R = mil[M_0M_1]$ d'où $R(-2,0.75)$

La point de C2 de paramètre 1/2 est x=-2-1+1=-2 et y=1-1/4=0,75, c'est donc bien R.

Ensuite, toujours pareil: le vecteur tangent à C2 en A correspond à t=1, c'est donc $\overrightarrow{T_1}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ (on le lit sur le tableau de variations, aucun calcul à faire). Or, les coordonnées de (AB) sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Du déjà vu.

C1 et C2 on même tangente (AB) en A.

*Maintenant il faut approfondir un peu le truc:*
*Je vais construire les trois points $M_0$, $M_1$ et $R$ vérifiant $\overrightarrow{EM_0} = a\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FM_1} = a\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{M_0R} = a\overrightarrow{M_0M_1}$, avec* a *un paramètre allant de 0 à 1. Pour a=1/2 je retrouve la construction de l'énoncé.*
*voici un schéma pour diverses valeurs de* a*:*




*C'est ce qu'on appelle la construction de la courbe de Bézier par barycentres. La courbe de Bézier de A,B,C est l'ensemble des barycentres $R = \{K_aL_{1-a}\}$ avec $K = \{A_aB_{1-a}\}$ et $L = \{B_aC_{1-a}\}$.*